

# Wirtschaftsnobelpreis 2012

## Auf der Suche nach dem passenden Gegenstück

**Wie lassen sich verschiedene Akteure auf die bestmögliche Art und Weise zusammenbringen? Dieses zentrale wirtschaftliche Problem haben die US-Ökonomen Lloyd S. Shapley und Alvin E. Roth erforscht. Für die Entwicklung und Anwendung einer Theorie, bestimmte Märkte so zu gestalten, dass sie möglichst effizient und zum Wohle aller Beteiligten funktionieren, erhielten sie den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 2012. Ihre wissenschaftlichen Erkenntnisse helfen in der Praxis bei der Vergabe von Studienplätzen bis hin zur Verteilung von Spendernieren an Patienten.**

Auf Platons Mythos von den „Kugelmenschen“ geht die Idee zurück, dass es zu jedem Menschen auf der Welt nur genau ein passendes Gegenstück gibt. Und weil diese Paare sich in der Regel nicht finden können, sind die Menschen verzweifelt und voller Sehnsucht. Für die meisten

mag das im wahren Leben nicht ganz so dramatisch verlaufen. Dennoch erweist sich die Suche nach dem passenden Partner in vielen Situationen als zentrales, häufig auch als wirtschaftliches Problem. Ob es um die Vergabe von Studienplätzen, die Verteilung von Ärzten auf Krankenhäuser, von Schülern auf Schulen oder von Spenderorganen auf Patienten geht: In all diesen Fällen gilt es, verschiedene Akteure auf bestmögliche Weise zusammenzubringen.

Diesem Problem widmete sich der amerikanische Ökonom und Mathematiker Lloyd S. Shapley bereits Anfang der 1960er Jahre. Gemeinsam mit seinem im Jahr 2008 verstorbenen Kollegen David Gale bediente er sich hierzu der Spieltheorie. Diese hat im Wesentlichen das Ziel, Situationen zu modellieren, in denen verschiedene Akteure sich in ihren Entscheidungen gegenseitig beeinflussen. Gale und Shapley konzentrierten sich in einem im Jahr 1962 veröffentlichten Aufsatz einerseits auf einen „Heiratsmarkt“, andererseits auf die Frage, wie man den Prozess der Studienplatzvergabe auf Grundlage der Präferenzen beider Marktseiten – der Studieninteressenten und der Universitäten – besser organisieren kann.

Auf der Basis dieser Theorie beschrieb Alvin E. Roth in einem Aufsatz von 1984 das Problem frisch ausgebildeter Mediziner am amerikanischen Arbeitsmarkt von 1900 bis in etwa zum Ende des zweiten Weltkriegs. Der



Alvin E. Roth, Professor für Volks- und Betriebswirtschaftslehre an der Stanford University, Kalifornien

zunehmende Wettbewerb zwischen den Krankenhäusern um qualifizierten medizinischen Nachwuchs hatte dazu geführt, dass 1945 Medizinstudenten schon zwei Jahre vor ihrem Abschluss rekrutiert wurden. Nicht selten kamen die Beschäftigungsverhältnisse später jedoch nicht zustande oder waren nur von kurzer Dauer – sei es, weil sich der Beschäftigungsbedarf der Krankenhäuser verändert hatte, sei es, weil die persönliche Situation oder die berufliche Orientierung der Bewerber nunmehr eine andere war.

Roth erkannte, dass die Arbeit von Gale und Shapley dazu beitragen könnte, das praktische Funktionieren von Märkten besser zu verstehen und Märkte wie den für Medizinabsolventen effizienter zu gestalten. Roth und sein Team zeigten in einer Reihe von empirischen Studien, dass Stabilität das Kriterium dafür ist, ob Märkte gut funktionieren. Sie konnten später mit einer großen Zahl von Experimenten ihre theoretischen Annahmen empirisch untermauern. Darauf aufbauend richtete Roth die ersten nach ihm und einem Kollegen benannten „Roth-Peranson-Clearinghouses“ ein. Sie organisieren die Verteilung des Ärztenachwuchses auf Krankenhäuser oder von Studenten und Schülern auf Universitäten und Schulen gerechter und effizienter.

### So funktioniert die Bildung stabiler Paare

Der Algorithmus von Gale und Shapley, also ein nach einem bestimmten Schema ablaufender Rechenvorgang, beschreibt ein Set von Verhaltensregeln. Sie führen unter bestimmten Voraussetzungen dazu, dass sich Paare bilden, die bei unveränderten Präferenzen kein Individuum besser stellen, ohne dass mindestens ein Individuum schlechter gestellt wird. Zudem kann kein Individuum einen Vorteil daraus ziehen, einseitig von seiner Strategie abzuweichen. Damit ergeben sich stabile Paare mit einer den individuellen Präferenzen entsprechenden bestmöglichen Passung.

Der Algorithmus setzt voraus, dass die Suchenden über die jeweils andere Marktseite informiert sind, entsprechende Präferenzen für die Anbieter auf der anderen Marktseite bilden und diese in einem individuellen Ranking ordnen.



Der Ökonom und Mathematiker Lloyd S. Shapley (links im Bild), emeritierter Professor an der University of California, mit US-Präsident Barack Obama.

Arbeitsuchenden beispielsweise müssten damit hinreichende Informationen über die Arbeitgeber zur Verfügung stehen, die für sie infrage kommen. Daraus würden sie vollständige und stabile Vorstellungen darüber ableiten, welche der für sie infrage kommenden Stellen sie präferieren. Es wird des Weiteren vorausgesetzt, dass sie keine Kenntnis über die Profile und Präferenzordnungen der anderen Arbeitsuchenden haben. Umgekehrt kennen die Arbeitgeber die Profile der Arbeitsuchenden und haben ebenfalls Präferenzen ausgebildet, sind aber nicht über die Anforderungsprofile und Präferenzen der anderen Stellenanbieter informiert.

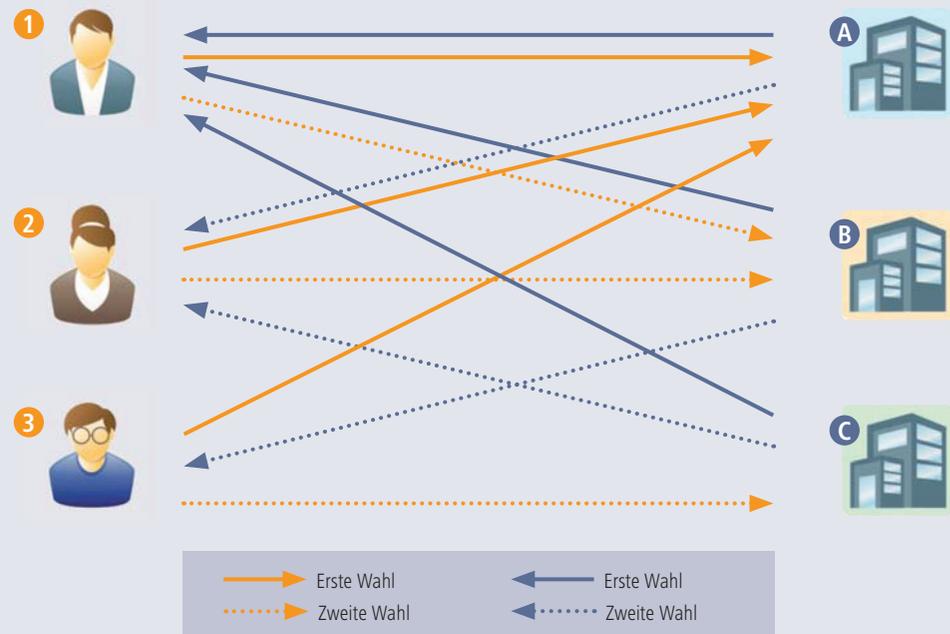
Für beide Seiten gilt, dass die Transparenz der jeweils anderen Marktseite und die fehlende Information über die Mitbewerber die Möglichkeit zu strategischem Verhalten deutlich einschränken, was für eine stabile Paarbildung unabdingbar ist. Wie die individuellen Präferenzordnungen zustande kommen und welche Informationen dabei eingehen, ist zunächst unerheblich. Entscheidend ist vielmehr, dass die Beteiligten eine individuelle Präferenzordnung haben und diese nicht mehr verändern. Box 1/3 auf Seite 100 illustriert diese Voraussetzungen anhand eines einfachen Beispiels für die Besetzung von offenen Stellen.

### Box 1/3: Fallbeispiel

Es gibt drei Personen 1, 2 und 3, für die jeweils eine Stelle in den Firmen A, B und C infrage kommt (vgl. Abbildung 1 unten). Wir nehmen in diesem Beispiel an, dass generell alle Bewerber für alle Firmen infrage kommen und umgekehrt. Dennoch haben die Akteure unterschiedliche Präferenzen. Dementsprechend haben sowohl die Arbeitsuchenden als auch die Firmen ihre Präferenzordnung erstellt. Die durchgezogenen Pfeile entsprechen jeweils der ersten, die gestrichelten Pfeile der zweiten Präferenz. Daraus ergibt sich die dritte Präferenz, die der Einfachheit halber nicht durch einen dritten Pfeil gekennzeichnet ist. Zum Beispiel zieht Person 1 die Firma A der Firma B vor. Firma C steht auf ihrer Präferenzliste ganz unten.

Abbildung 1

#### Präferenzen von Bewerbern und Firmen bei der Suche nach bzw. Besetzung von offenen Stellen



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Royal Swedish Academy of Sciences 2012.

©IAB

### Prozess der Stellenbesetzung als Anwendungsbeispiel

Generell läuft der Algorithmus so ab, dass eine Seite, der „Proposer“, entsprechend ihrer Präferenzordnung ein Angebot unterbreitet und die andere Seite, der „Responder“, darauf reagiert.

Ein beliebiger Arbeitsuchender (Proposer) unterbreitet dem von ihm am höchsten präferierten Stellenanbieter ein verbindliches Angebot. Der Stellenanbieter (Responder) willigt zunächst ein und es bildet sich eine vorläufige

Stellenanbieter-Bewerber-Kombination, also ein vorläufiges Paar. Anschließend bietet ein anderer Bewerber dem wiederum von ihm am meisten bevorzugten Stellenanbieter seine Arbeitskraft an. Wenn es sich bei Letzterem nicht um den Stellenanbieter handelt, der bereits mit dem ersten Arbeitsuchenden ein Paar gebildet hat, bildet sich ein zweites vorläufiges Paar.

Handelt es sich jedoch um den ersten Stellenanbieter, der bereits mit dem ersten Bewerber zu einem vorläufigen

Paar verbunden ist, prüft der Stellenanbieter anhand seiner Präferenzordnung, welchen Bewerber er bevorzugt:

■ Ist es der erste Bewerber, dann bleibt das erste vorläufige Paar bestehen, und der zweite Bewerber wendet sich dem Stellenanbieter mit der aus seiner Sicht zweitbesten Offerte zu. Bevorzugt der Stellenanbieter den zweiten Bewerber, dann löst sich das bestehende vorläufige Paar mit dem ersten Bewerber auf. Der Stellenanbieter bildet nun mit dem zweiten Bewerber ein wiederum vorläufiges Paar. Der erste Bewerber wendet sich mit einer Offerte an den aus seiner Sicht zweitbesten Stellenanbieter.

Auf diese Weise werden die Präferenzordnungen aller Teilnehmer durchlaufen. Erst am Ende ergeben sich endgültige Stellenanbieter-Bewerber-Kombinationen (vgl. auch Box 2/3).

Es ist unerheblich, ob die Zahl der Anbieter und die Zahl der Nachfrager gleich hoch sind. Die Marktseite mit der geringeren Teilnehmerzahl bestimmt die Zahl der Paare. Im Ergebnis kann es unbesetzte offene Stellen oder Arbeitssuchende ohne Arbeitsplatz geben. Sind Präferenzordnungen unvollständig, weil beispielsweise ein Arbeitssuchender bestimmte Stellen kategorisch ausschließt, da sie aus

### Box 2/3: Fortsetzung des Fallbeispiels

Auch im folgenden Beispiel übernimmt der Bewerber die Funktion des Proposers, ergreift also mit seinem Stellensuch die Initiative (vgl. Abbildung 1, linke Seite). Ihren Präferenzen entsprechend bewerben sich zunächst alle drei Bewerber bei Firma A. Firma A als Responder gibt ihren Präferenzen entsprechend Person 1 eine Zusage und lehnt die Personen 2 und 3 ab. Person 2 wendet sich dann entsprechend ihrer zweiten Präferenz an Firma B wenden, Person 3 entsprechend an Firma C. Da beiden Firmen keine weiteren Angebote vorliegen, geben sie jeweils eine Zusage (vgl. Abbildung 2 unten). Tatsächlich ergeben sich daraus stabile Verbindungen: Bewerber 1 und Firma A haben keinen Anreiz, auseinanderzugehen. Bewerber 2 würde, ebenso wie Bewerber 3, zwar lieber zu Firma A gehen, beide Bewerber wurden aber von dieser abgelehnt. Die Firmen B und C haben ebenfalls nicht ihre höchste Präferenz erreicht. Sie geben sich allerdings mit dem Ergebnis zufrieden, da sie davon ausgehen müssen, keinen besseren Bewerber zu finden. Denn sie wurden zuvor nicht von den aus ihrer Sicht attraktiveren Bewerbern angefragt.

Abbildung 2

#### Ergebnis des Spiels, wenn die Bewerber als Vorschlagende fungieren.



Ergebnis aus Sicht ...	
... des Bewerbers	... der Firma
1. Wahl	1. Wahl
2. Wahl	3. Wahl
2. Wahl	3. Wahl

seiner Sicht bestimmte Mindestbedingungen nicht erfüllen, können ebenfalls Teilnehmer leer ausgehen.

Der Algorithmus käme bei kleinen Fallzahlen in angemessener Zeit zu stabilen Ergebnissen und es bedürfte auch keiner zentralen Stelle, die die Präferenzordnungen auswertet und das Ergebnis mitteilt. In der Praxis geht es aber häufig um große Fallzahlen. Deshalb wurden in den USA die erwähnten „Roth-Peranson-Clearinghouses“ eingerichtet. Dort werden die Präferenzordnungen beider Marktseiten zusammengeführt und nach dem etwas komplexeren Gale-Shapley-Algorithmus ausgewertet. Aufgabe der Clearinghouses ist es zum Beispiel, jungen Ärzten nach ihrer Ausbildung ihren ersten Job im Krankenhaus zuzuweisen. Ebenso gibt es in manchen Bundesstaaten Clearinghouses zur Vergabe von Studienplätzen etwa in New York oder in Massachusetts.

### **Mehrere stabile Lösungen sind möglich**

Der Gale-Shapley-Algorithmus kann zu mehreren stabilen Lösungen, also stabilen Kombinationen von Paaren, führen. Diese Lösungen lassen sich aus der jeweiligen Perspektive der Proposer und der Responder nach folgender Regel sortieren: Eine Lösung A wäre aus der Sicht der Bewerber einer Lösung B dann vorzuziehen, wenn jeder Bewerber bei Lösung A eine Firma als Partner bekommt, die er mindestens genauso bevorzugt wie seine Firma in Lösung B. Bei der Gesamtheit der stabilen Lösungen ist die Präferenzordnung der Proposer allerdings der Präferenzordnung der Responder genau

entgegengesetzt: Ist Lösung A aus Sicht der Firmen der Lösung B vorzuziehen, so würden die Bewerber Lösung B gegenüber Lösung A präferieren.

### **Wer als erster ein Angebot macht, ist im Vorteil**

Für jede der Parteien kann zudem die am höchsten präferierte Lösung eindeutig bestimmt werden. Aus diesem Grund kann es bedeutsam sein, welche Seite als erste einen Vorschlag macht. Der Gale-Shapley-Algorithmus produziert nämlich immer die Lösung, die den Präferenzen der Proposer am besten entspricht. Für den Responder kann diese Lösung jedoch – je nach Zustandekommen der Präferenzordnungen – die Schlechteste der (stabilen) Lösungen darstellen. Wer als erstes ein Angebot unterbreitet, ist also bei diesem Verfahren im Vorteil (vgl. auch Box 3/3).

Es kann auch Fälle geben, bei denen je nach Bildung der Präferenzen eine Lösung gegenüber anderen Lösungen gleichwertig ist, also keine Seite schlechter oder besser stellt. Reinhard Schüssler und Christian Seidel haben in einer im Jahr 2010 erschienenen Publikation gezeigt, dass dies gerade für den Arbeitsmarkt theoretisch denkbar wäre. Dies gilt insbesondere dann, wenn bei der Erzeugung der Präferenzordnung die jeweilige Passgenauigkeit von Stellenanforderungen und Bewerberprofil maßgeblich ist. In der Praxis allerdings dürfte die Entscheidung über die Relevanz der zu erhebenden Merkmale und die Messung des Grades der Passgenauigkeit die größten Probleme bereiten.

### **Box 3/3: Fortsetzung des Fallbeispiels**

In unserem Beispiel ist das Ergebnis aus Sicht der Bewerber günstiger ausgefallen. Person 1 hat ihre erste Wahl realisiert. Die anderen beiden erreichten jeweils ihre zweite Wahl. Bei den Firmen hat zwar auch eine Firma (A) ihre erste Wahl erhalten, die anderen beiden (B und C) realisierten allerdings nur ihre jeweils dritte Wahl (vgl. Tabelle auf der rechten Seite von Abbildung 2 auf Seite 101).

Hätten die Firmen als Proposer agiert, hätte sich eine für alle drei günstigere Lösung ergeben. Person 1 und Firma A wären wieder zusammengekommen. Die Firmen B und C hätten allerdings ihre jeweils zweite Präferenz, Person 3 für Firma B und Person 2 für Firma C, für sich gewinnen können.

## Fazit

Generell kann der Gale-Shapley-Algorithmus auf Märkten angewendet werden, wo Anbieter und Nachfrager hinreichend informiert sind, um eine individuelle Präferenzordnung für die andere Marktseite erstellen zu können. Zudem muss ihre qualitative und quantitative Zusammensetzung relativ stabil sein, so dass auch die Präferenzen im Wesentlichen unverändert bleiben. Schließlich dürfen die Anbieter und Nachfrager ihr eigenes Leistungs- oder Gegenleistungsangebot gegenüber der anderen Marktseite nicht abstimmen, etwa indem eine Firma Bewerber A ein höheres Entgelt anbietet als Bewerber B. Vielmehr müssen beide Seiten ihr Angebot zu Beginn machen und daran gebunden sein.

Diese Voraussetzungen sind auf dem allgemeinen Arbeitsmarkt kaum erfüllbar. Zwar wäre es wohl technisch möglich, dass eine Institution wie die Bundesagentur für Arbeit weitgehende Transparenz für beide Marktseiten herstellt. Dann müssten sich aber alle Stellenanbieter und alle Arbeitssuchenden in den Datenbanken registrieren, die die Bundesagentur für Arbeit anbietet. Um Umfang und Struktur von Arbeitsangebot und Arbeitsnachfrage zumindest zeitweise konstant zu halten, müsste der Arbeitsmarkt für einen bestimmten Zeitraum gleichsam „eingefroren“ werden, Angebot und Nachfrage dürften sich in dieser Zeit nicht verändern. Das ist weder realistisch noch volkswirtschaftlich wünschenswert. Schließlich passen Anbieter und Nachfrager ihr Angebot, also beispielsweise den Umfang der Arbeitsleistung oder die Vergütung, in der realen Volkswirtschaft von Fall zu Fall an.

Dennoch könnte der Algorithmus für spezifische Arbeitsmarktsituationen auch in Deutschland angewendet werden. So könnten Effizienz und Gerechtigkeit bei der zentralen Studienplatzvergabe verbessert werden, wie es auch einmal von einigen Ökonomen in der Frankfurter Allgemeinen Zeitung gefordert wurde. Darüber hinaus wären auf dem Algorithmus basierende Verfahren für betriebsinterne Arbeitsmärkte denkbar. Insbesondere strukturelle Veränderungen machen von Zeit zu Zeit eine Reallokation des vorhandenen Personals nötig. Ebenso könnten solche Verfahren Unternehmen dabei

unterstützen, die Absolventen betriebseigener Ausbildungseinrichtungen in effizienter Weise auf freie Stellen im Unternehmen zuzuweisen.

Gale und Shapley haben erheblich dazu beigetragen, dass ganz unterschiedliche Akteure ein jeweils passendes Gegenstück gefunden haben. Und hätten Platons zerrissene Kugelmenschen das Spiel gekannt, wäre ihre Suche möglicherweise doch endlich gewesen.

## Literatur

Frankfurter Allgemeine Zeitung (15.10.2012): Wirtschafts-Nobelpreisträger. Markt-Ingenieure. Online verfügbar unter <http://m.faz.net/aktuell/wirtschaft/menschen-wirtschaft/wirtschafts-nobelpreistraeger-markt-ingenieure-11927091.html>. Zuletzt geprüft am 2.12.2012.

Gale, David; Shapley; Lloyd S. (1962): College Admissions and the Stability of Marriage. In: *American Mathematical Monthly* 69, S. 9-14.

Roth, Alvin E. (1984): The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. In: *Journal of Political Economy* 92, S. 991-1016.

Roth, Alvin E. (2007): Deferred Acceptance Algorithms: History, Theory, Practice, and open Questions. In: *International Journal of Game Theory*, Special Issue in Honor of David Gale on his 85th birthday, 36, March, 2007, S. 537-569.

Royal Swedish Academy of Sciences (2012): The Prize in Economic Sciences 2012. Information for the public. Stable matching: Theory, evidence, and practical design. Online verfügbar unter [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/2012/popular-economicsciences2012.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/popular-economicsciences2012.pdf)

Schüssler, Reinhard; Seidel, Christian (2010): Gale Shapley auf dem Arbeitsmarkt, <http://hdl.handle.net/10419/55829>

### Der Autor



#### Michael Stops

ist wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Forschungsgruppe „Berufliche Arbeitsmärkte“ am IAB.

[michael.stops@iab.de](mailto:michael.stops@iab.de)